Übungen zu Mathematik III
Blatt 5

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Mehrfachintegrale:

a) $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 x \cdot y \cdot z \, dx \, dy \, dz$

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta$

Aufgabe 2: Wir betrachten den elektrisch geladenen Einheitswürfel $[0,1]^3$ (Einheit in Meter). Die Ladung sei linear verteilt und wird durch die folgende Ladungsdichte (in Coulomb pro Quadratmeter) beschrieben:

$$\rho(x, y, z) = x - 2y + z \, .$$

Wie groß ist die Gesamtladung im Würfel?

Aufgabe 3: Wir betrachten folgende, allgemeine lineare Ladungsverteilung im Einheitswürfel $[0,1]^3$ (Einheit in Meter):

$$\rho(x, y, z) = ax + by + cz \, .$$

Welche Bedingung muss an die Parameter a, b und c gestellt werden, damit die Ladungsverteilung elektrisch neutral ist?

Aufgabe 4: Integrieren Sie das Skalarfeld

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

über den Halbkreis mit Radius $R = 1$, der in der oberen Halbebene des Koordinatensystems liegt.

Aufgabe 5: Wir betrachten einen Kreisring, der sich durch zwei konzentrische Kreise mit Radien r und R ergibt, wobei $r < R$. Verwenden Sie die Integralrechnung um nachzuweisen, dass die Formel für den Flächeninhalt wie folgt lautet:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) \, .$$

Aufgabe 6: Berechnen Sie das Volumen des blauen Kugelsegmentes in Abb. 1.

Aufgabe 7: Integrieren Sie das Skalarfeld

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

über den Zylinder mit Höhe h und Radius R.

Aufgabe 8: Berechnen Sie den Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel vom Radius R (Halbkugel über der x-Achse). Folgende Beziehung kann hilfreich sein:

$$\left(-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right)' = \cos\theta \cdot \sin\theta\,.$$

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die mittlere Temperatur

$$\bar{T} = \frac{1}{A}\iint_K T(x_1, x_2)\,dA$$

einer kreisförmigen Heizplatte K mit Radius R unter der Annahme, dass die Temperatur von der Mitte (Temp. T_1) nach außen (Temp. T_2) linear abnimmt? Hierbei sei A der Flächeninhalt der Heizplatte und $T(r)$ beschreibt die lineare Temperaturverteilung im Abstand r vom Ursprung. Wie hängt die mittlere Temperatur mit der Größe der Heizplatte zusammen?

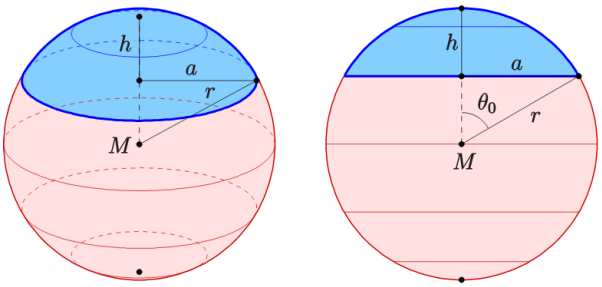


Abbildung 1: Wie groß ist das Volumen des blauen Kugelsegments?